إحصاء واحتمال (نظري)

المحاضرة النظرية السابعة

※ نظرية التقدير النقطي:

لدينا مجتمع موصوف بالوسطاء $\theta_1, \theta_2, \theta_3 ---- \theta_k$ حيث k محدود

في كثير من الأحيان يصعب معرفة القيمة الحقيقية لتلك الوسطاء لذلك

نبحث عن قيمة تقديرية لهذه الوسطاء ونحسب حساب

$\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2 ---- \hat{\theta}_k$

وتقرأ $\hat{\theta}$ ثيتا هات تقدير أو تقدير لـ θ

هذه القيم ليست حقيقية إنما هي قيم تقريبية لذلك سميت بنظرية

التقدير النقطي

((لكل نقطة أو وسطاء حسب نوع الشيء المدروس))

※ تعريف العينة العشوائية: تكون القياسات $x_1, x_2 ---- x_n$

هي عينة عشوائية إذا تحقق شرطان

1) لكل من المتحولات نفس القانون الاحتمالي

2): هذه المتحولات مستقلة

((عندها نسمي $x_1, x_2 ---- x_n$ عينة عشوائية))

عندما يكون لهذه المتحولات القانون الاحتمالي نجد أن لكل متحول نفس

التوقع والتشتت

نتائج:

ن1: لكل من المتحولات نفس التوقع والتشتت

هام ن2: الدالة التي تصف المجتمع يجب أن تكون متعلقة بجميع المتحولات

$\theta_1, \theta_2 ---- \theta_n$ الوسطاء وجميع $x_1 ---- x_n$

نعرف دالة القراءة $L(\underline{X}, \underline{\theta})$ بـ دالة القراءة

$\theta_1, \theta_2 \ldots \theta_n$ $\quad X_1, X_2 \ldots X_n$

إذا كانت المتحولات منفصلة أي x_i منفصلة

$$\Rightarrow L(\underline{X}, \underline{\theta}) = \prod_{i=1}^{n} F(x_i, \underline{\theta})$$

دوال القانون الاحتمالي

إذا كانت المتحولات متصلة أي x_i متصلة

$$\Rightarrow L(\underline{X}, \underline{\theta}) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i, \underline{\theta})$$

دوال الكثافة الاحتمالية

* نلاحظ أن الوسطاء تصف المجتمع كاملاً لذلك تدخل في جميع قيم المتحولات

لتقدير وسطاء $\theta_1, \theta_2 \ldots \theta_k$ نتبع الطريقة الآتية :

I : طريقة الاحتمالية العظمى : تقوم على ما يلي

لتقدير الوسطاء $\underline{\theta}$ أي لنوجد المقدرات $\hat{\underline{\theta}}$ نقوم بما يلي

1- نوجد دالة القراءة $L(\underline{X}, \underline{\theta})$ لـ القانون الاحتمالي المشترك

2- نوجد المشتقات الجزئية بالنسبة للوسطاء جميعاً

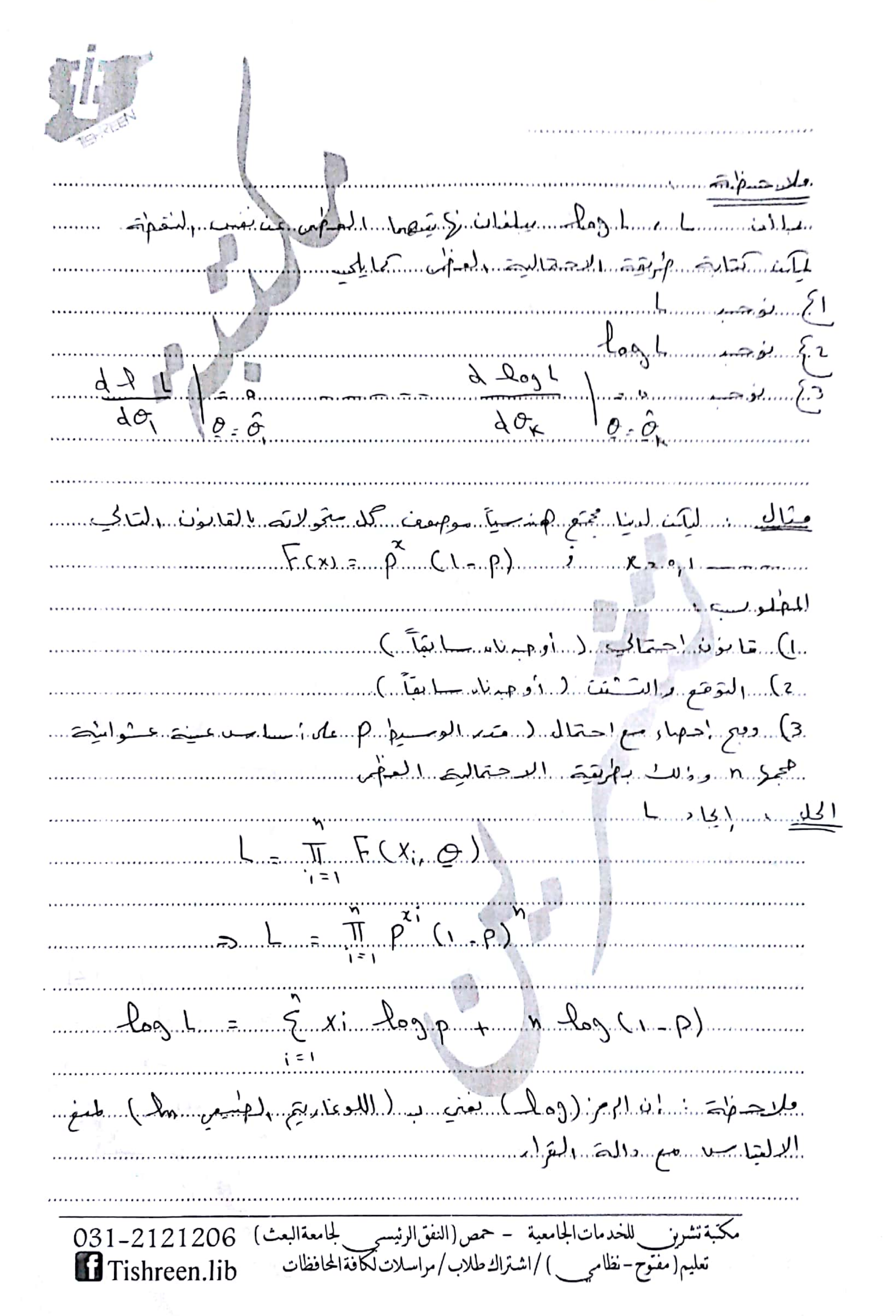
$$\frac{dL}{d\theta}, \frac{dL}{d\theta_1} \ldots \frac{dL}{d\theta_k}$$

3- نعدم هذه المشتقات عند المقدرات فنحصل على المعادلات التالية

$$\left.\frac{dL}{d\theta_1}\right|_{\theta=\hat{\theta}} = 0, \quad \left.\frac{dL}{d\theta_2}\right|_{\theta=\hat{\theta}} = 0 \ldots \left.\frac{dL}{d\theta_k}\right|_{\theta=\hat{\theta}} = 0$$

نلاحظ أن k معادلة بـ k مجهول ...

4- نحل الـ k معادلة والتي تحوي k وسيط (مجهول) نحصل على المقدرات المطلوبة $\hat{\underline{\theta}}$



ملاحظة:

بما أن L , $\log L$ يبلغان ذروتهما العظمى عند نفس النقطة

يمكن كتابة طريقة الاحتمالية العظمى كما يلي:

1) نوجد L

2) نوجد $\log L$

3) نوجد $\left.\frac{d \log L}{d\theta_1}\right|_{\theta=\hat{\theta}_1}$ .... $\left.\frac{d \log L}{d\theta_k}\right|_{\theta=\hat{\theta}_k}$

مثال: ليكن لدينا مجتمع هندسياً موصوف كل متحولاته بالقانون التالي

$$F(x) = p^x (1-p) \quad ; \quad x = 0,1,\ldots$$

المطلوب:

1) قانون احتمالي (أوجدناه سابقاً)

2) التوقع والتشتت (أوجدناه سابقاً)

3) وضع أخطاء مع احتمال (مقدر الوسيط p على أساس عينة عشوائية حجمها n وذلك بطريقة الاحتمالية العظمى

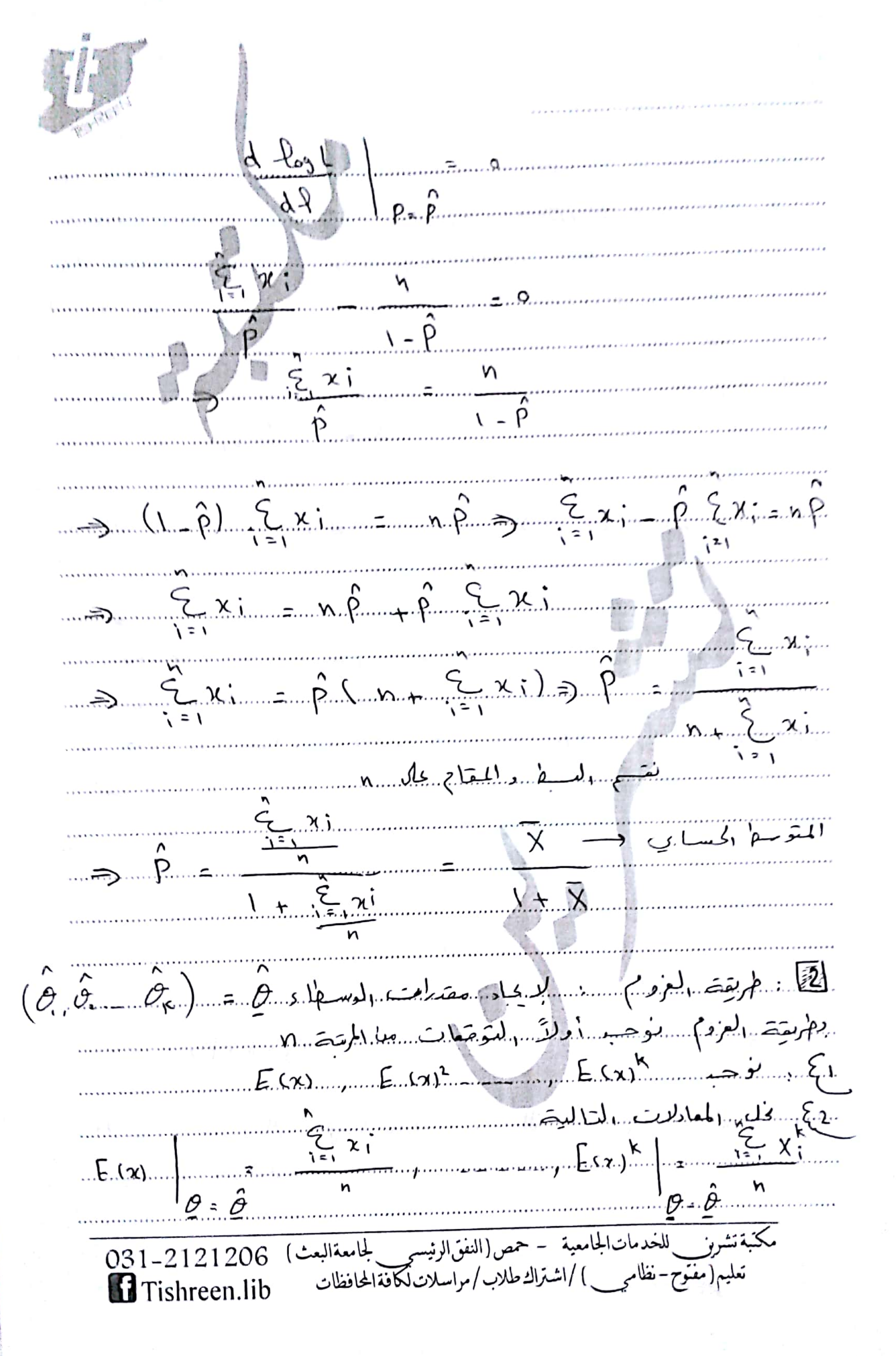
الحل: إيجاد L

$$L = \prod_{i=1}^{n} F(x_i, \theta)$$

$$\Rightarrow L = \prod_{i=1}^{n} p^{x_i} (1-p)^n$$

$$\log L = \sum_{i=1}^{n} x_i \log p + n \log(1-p)$$

ملاحظة: إن الرمز (log) يعني بـ (اللوغاريتم الطبيعي ln) منعاً للالتباس مع دالة القراءة



$$\left.\frac{d \log L}{dp}\right|_{p=\hat{p}} = 0$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\hat{p}} - \frac{n}{1-\hat{p}} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\hat{p}} = \frac{n}{1-\hat{p}}$$

$$\Rightarrow (1-\hat{p}) \sum_{i=1}^{n} x_i = n\hat{p} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i - \hat{p} \sum_{i=1}^{n} x_i = n\hat{p}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i = n\hat{p} + \hat{p} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i = \hat{p}\left(n + \sum_{i=1}^{n} x_i\right) \Rightarrow \hat{p} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n + \sum_{i=1}^{n} x_i}$$

نقسم البسط والمقام على n

$$\Rightarrow \hat{p} = \frac{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}}{1 + \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}} = \frac{\bar{X}}{1+\bar{X}}$$

$\bar{X} \rightarrow$ المتوسط الحسابي

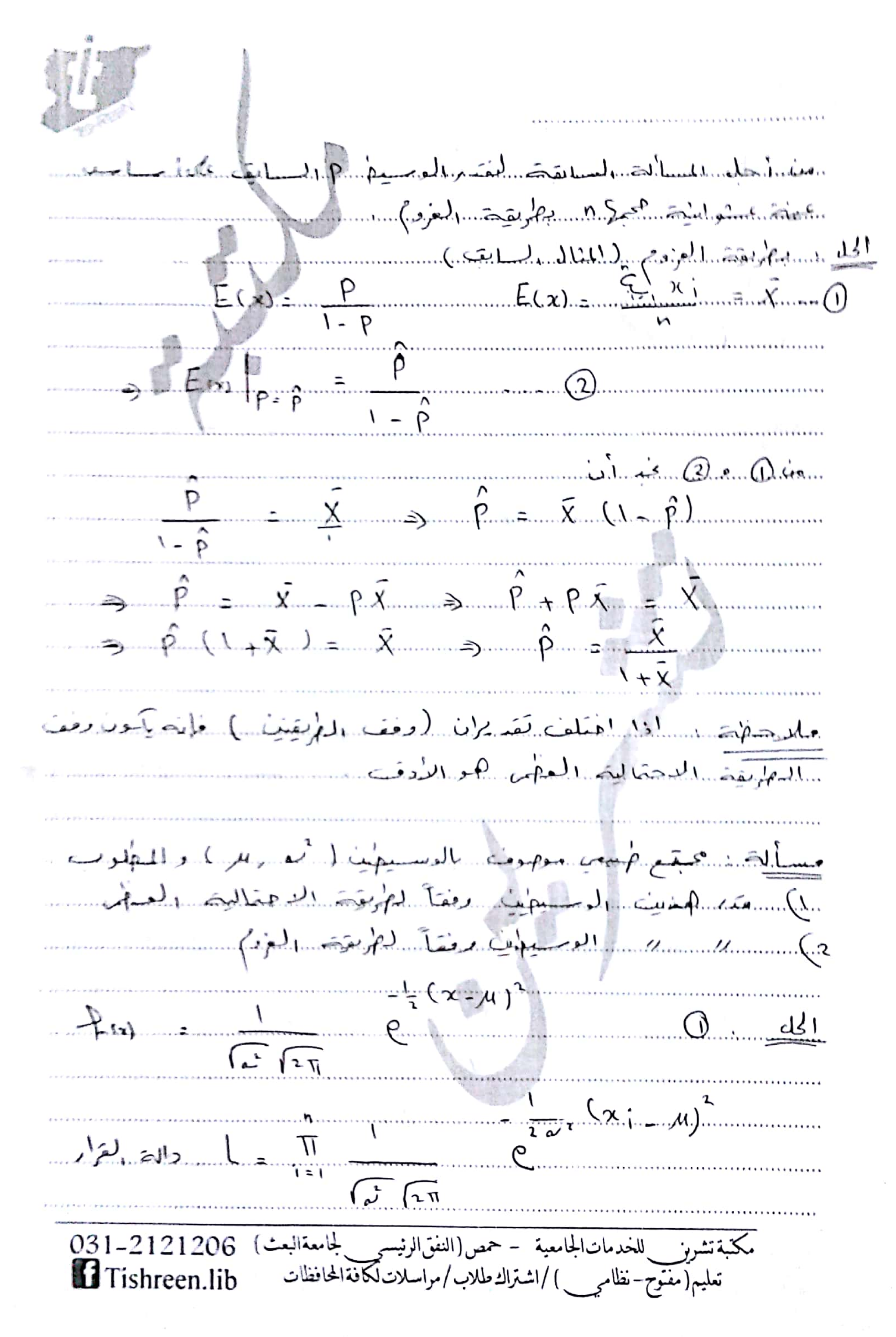
2 : طريقة العزوم : لإيجاد مقدرات الوسطاء $\hat{\theta} = (\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2 \ldots \hat{\theta}_k)$

بطريقة العزوم نوجد أولاً التوقعات من المرتبة n

1 : نوجد $E(x)$, $E(x)^2$ ... , $E(x)^k$

2 : نحل المعادلات التالية

$$\left.E(x)\right|_{\theta=\hat{\theta}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} , \ldots , \left.E(x)^k\right|_{\theta=\hat{\theta}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^k}{n}$$



سنأخذ حل المسألة السابقة لتقدير الوسيط p السابق لكل ساحب عينة عشوائية بحجم n بطريقة العزوم.

الحل: بطريقة العزوم (المثال السابق)

$$E(x) = \frac{p}{1-p} \qquad E(x) = \frac{\sum x_i}{n} = \bar{x} \quad (1)$$

$$\Rightarrow E(x)\Big|_{p=\hat{p}} = \frac{\hat{p}}{1-\hat{p}} \quad (2)$$

من (1) و (2) نجد أن

$$\frac{\hat{p}}{1-\hat{p}} = \bar{x} \Rightarrow \hat{p} = \bar{x}(1-\hat{p})$$

$$\Rightarrow \hat{p} = \bar{x} - p\bar{x} \Rightarrow \hat{p} + p\bar{x} = \bar{x}$$

$$\Rightarrow \hat{p}(1+\bar{x}) = \bar{x} \Rightarrow \hat{p} = \frac{\bar{x}}{1+\bar{x}}$$

ملاحظة: إذا اختلف تقديران (وفق الطريقتين) فإنه يكون وفق الطريقة الاحتمالية العظمى هو الأدق.

مسألة: مجتمع طبيعي موصوف بالوسيطين (μ , σ^2) والمطلوب

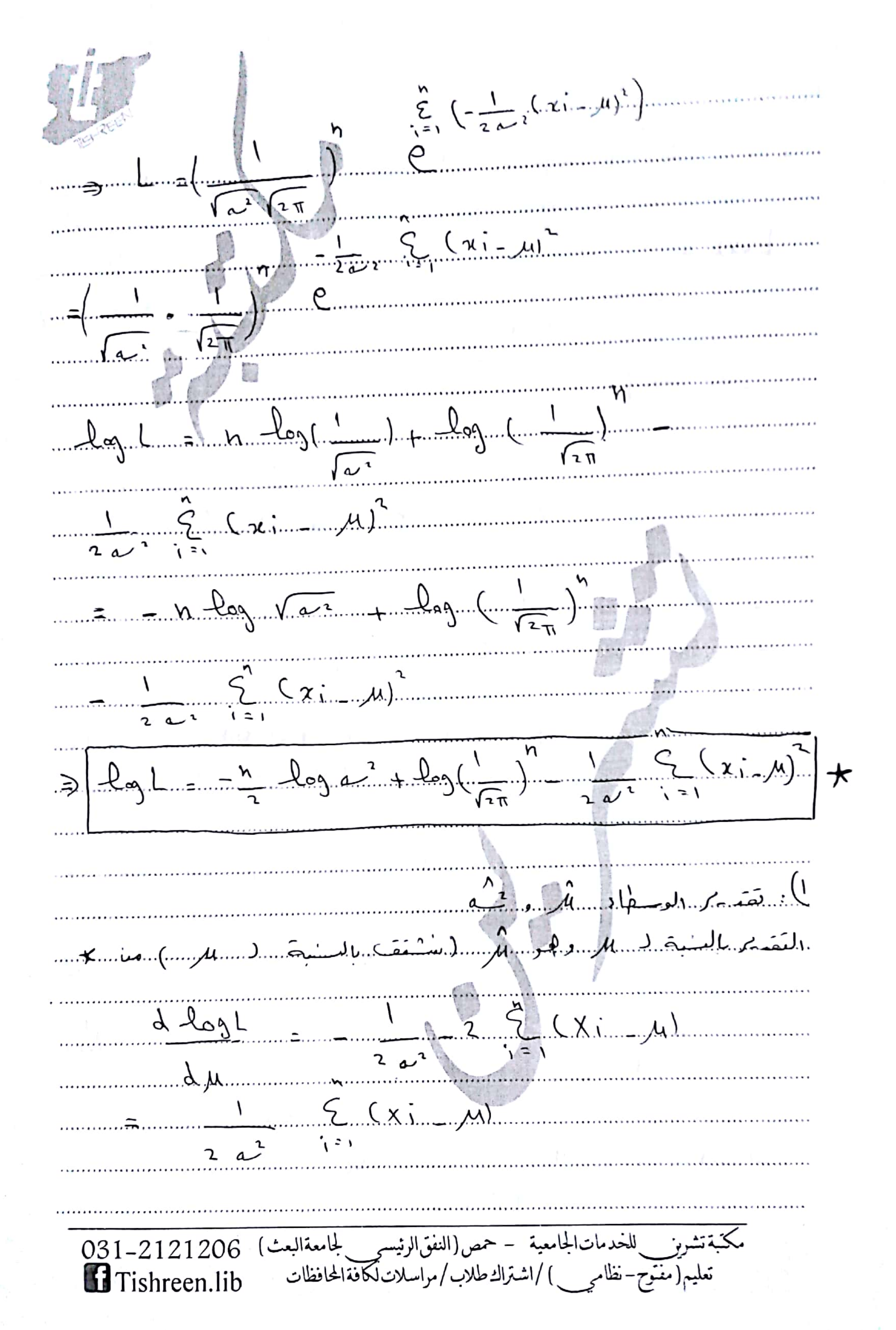
1. تقدير هذين الوسيطين وفقاً لطريقة الاحتمالية العظمى
2. " " الوسيطين وفقاً لطريقة العزوم

الحل: (1)

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\sigma^2}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^2}$$

دالة الإمكان

$$L = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{\sigma^2}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x_i-\mu)^2}$$



$$\Rightarrow L = \left(\frac{1}{\sqrt{\sigma^2}\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{\sum_{i=1}^{n}\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(x_i-\mu)^2\right)}$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{\sigma^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}$$

$$\log L = n \log\left(\frac{1}{\sqrt{\sigma^2}}\right) + \log\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$$

$$= -n \log\sqrt{\sigma^2} + \log\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$$

$$\Rightarrow \boxed{\log L = -\frac{n}{2}\log\sigma^2 + \log\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2} \quad \star$$

1) تقدير الوسطاء $\hat{\mu}$ و $\hat{\sigma}^2$

التقدير بالنسبة لـ μ وهو $\hat{\mu}$ (نشتق بالنسبة (μ) من $\star$

$$\frac{d \log L}{d\mu} = -\frac{1}{2\sigma^2} 2 \sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)$$

$$= \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)$$

$$\Rightarrow \left.\frac{d \log l}{d\mu}\right|_{\mu=\hat{\mu}\,;\ \sigma^2=\hat{\sigma}^2} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\hat{\sigma}^2}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n} \hat{\mu}\right) = 0$$

نضرب الطرفين بـ σ^2

$$\Rightarrow \left(\sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n} \hat{\mu}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i - n\hat{\mu} = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i = n\hat{\mu}$$

$$\Rightarrow \hat{\mu} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \bar{X}$$ → المتوسط الحسابي

تقدير الـ σ^2 وظيفة ☺

2) بطريقة العزوم تقدير μ

$$E x \Big|_{\mu=\hat{\mu}\,;\ \sigma^2=\hat{\sigma}^2} = \bar{X}$$

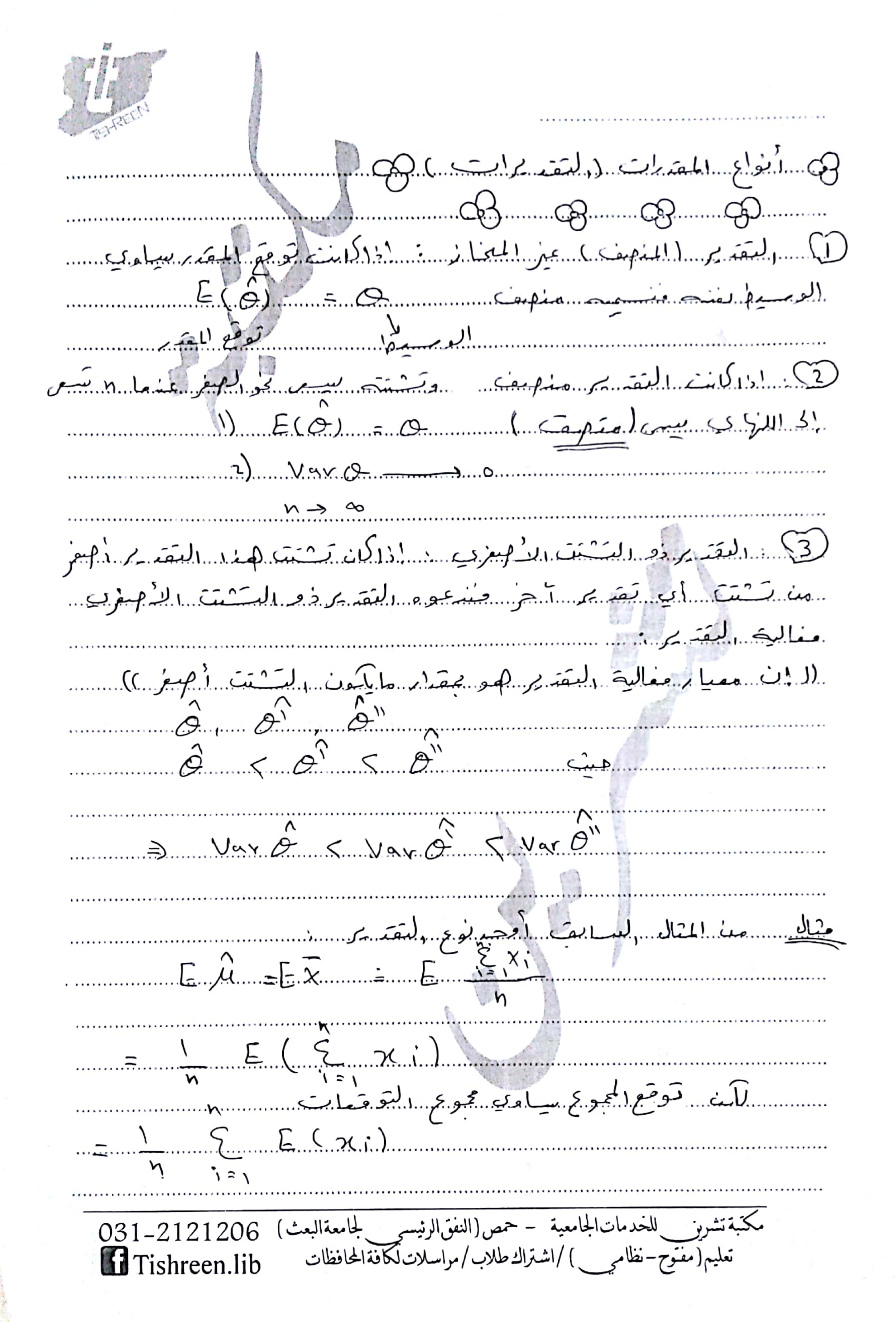
$$\Rightarrow \hat{\mu} = \bar{X}$$

تقدير σ^2 بطريقة العزوم

$$E x^2 \Big|_{\mu=\hat{\mu}\,;\ \sigma^2=\hat{\sigma}^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n}$$

$$\Rightarrow \hat{\sigma}^2 + \hat{\mu}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

$$\Rightarrow \hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} - (\bar{X})^2$$



أنواع المقدرات (التقديرات)

1) التقدير (المنصف) غير المتحاز: إذا كانت توقع المقدر يساوي الوسيط نفسه فنسميه منصف

$E(\hat{\theta}) = \theta$

توقع المقدر = الوسيط

2) إذا كانت التقدير منصف وتشتته يسعى نحو الصفر عندما n تسعى إلى اللانهاية يسمى (متسق)

1) $E(\hat{\theta}) = \theta$

2) $Var\,\theta \longrightarrow 0$

$n \to \infty$

3) التقدير ذو التشتت الأصغري: إذا كان تشتت هذا التقدير أصغر من تشتت أي تقدير آخر فندعوه التقدير ذو التشتت الأصغري فعالية التقدير:

((إن معيار فعالية التقدير هو بمقدار ما يكون التشتت أصغر))

$\hat{\theta}, \hat{\theta}', \hat{\theta}''$

حيث $\hat{\theta} < \hat{\theta}' < \hat{\theta}''$

$\Rightarrow Var\,\hat{\theta} < Var\,\hat{\theta}' < Var\,\hat{\theta}''$

مثال: من المثال السابق أوجد نوع التقدير:

$E\,\hat{\mu} = E\bar{x} = E\,\frac{\sum_{i=1} x_i}{n}$

$= \frac{1}{n}\,E\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)$

لأن توقع المجموع يساوي مجموع التوقعات

$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(x_i)$

$= \frac{1}{n}(n\mu) = \mu$

$\Rightarrow E\hat{\mu} = \mu$ وهو منصف

يجب مناقشة أنه متسق

$Var\hat{\mu} = Var\bar{X}$

$= Var\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{1}{n^2} Var\sum_{i=1}^{n} x_i$

نلاحظ أن تشتت المجموع يساوي مجموع التشتتات لأن المتحولات مستقلة خطياً

$= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} Var\, x_i$

$= \frac{1}{n^2}\, n\sigma^2 = \frac{n\sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}$

$\Rightarrow Var\,\mu \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

إذاً التقدير متسق

<< انتهت المحاضرة السابعة >>

<< مع تمنياتي لكم بالتوفيق والنجاح >>

إعداد: فاطمة الشميني